

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 06.06.2023

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

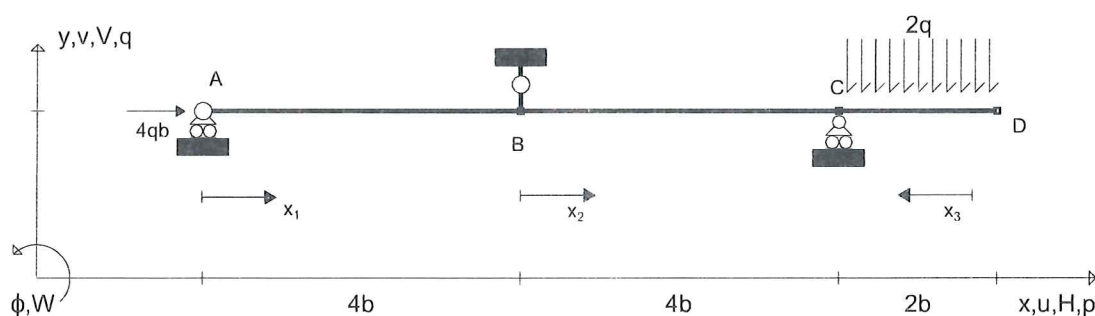
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , φ_A

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Università di Cagliari

SdC_SdA 06.06.23*001



EQ. DI CONGUGENZA : $\Delta\varphi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

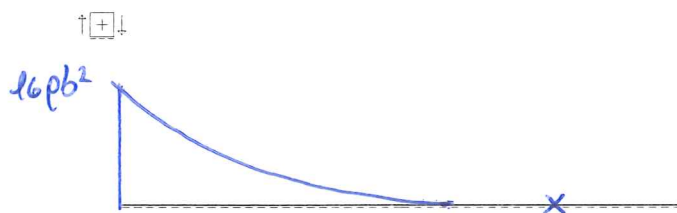
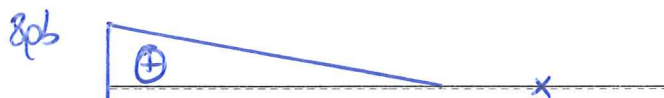
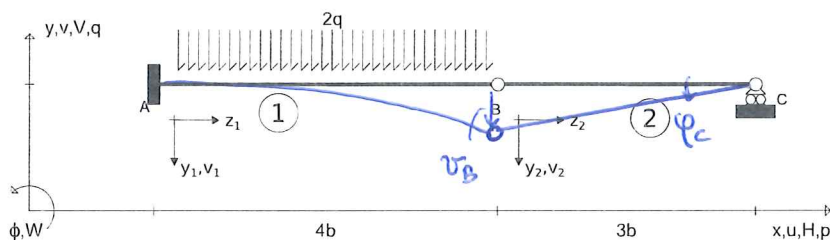
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *C*, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B*, v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 06.06.23*001



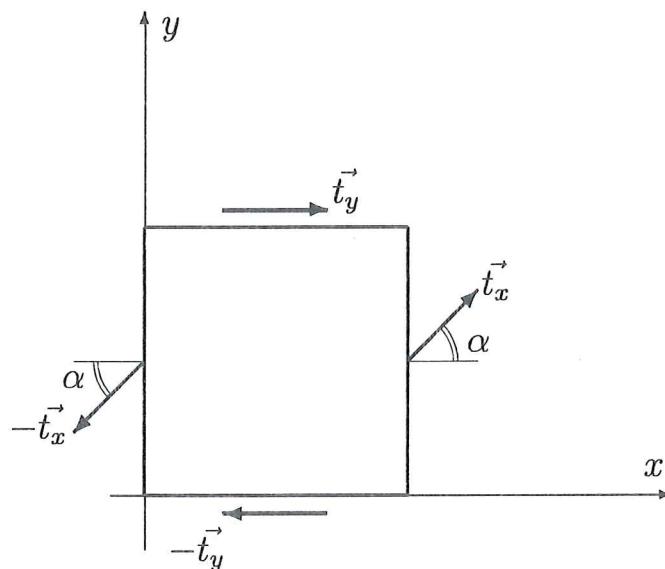
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 8pb; & M_A (\curvearrowright) &= 16pb^2; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 8pb - 2qz_1; & M_{AB} &= -16pb^2 + 8qz_1^2 - \frac{1}{3}qz_1^3; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0) = 0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=4b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=3b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(8pb^2 z_1^2 - \frac{4}{3}pbz_1^3 + \frac{1}{12}qz_1^4 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(16pb^2 z_1 - 4pbz_1^2 + \frac{1}{3}qz_1^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{64}{3}pb^3 z_2 + 64pb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-64/3 pb^3 \right); \\
 v_B &= \frac{64pb^4}{EI} (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{64pb^3}{3EI} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 60^\circ$ (sicché $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$; $\cos \alpha = 1/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 45$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

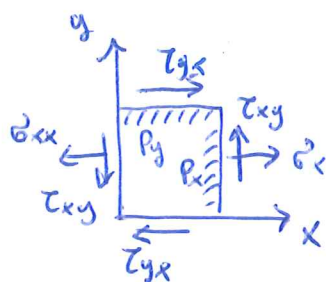
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 22,500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 38,871 \text{ (MPa)};$$

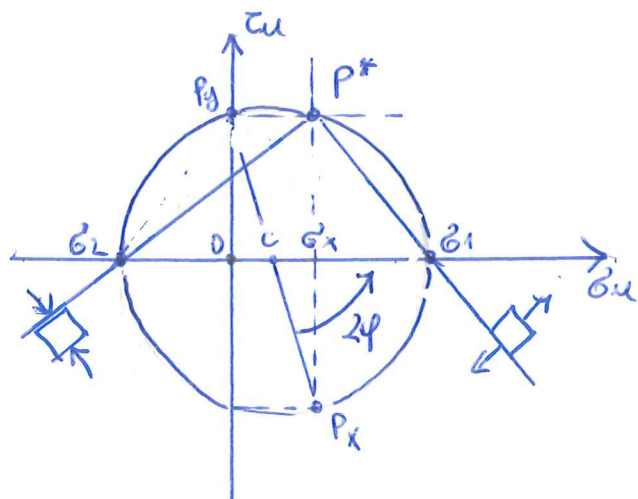
$$\sigma_1 = 51,812 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -29,312 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 40,562 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

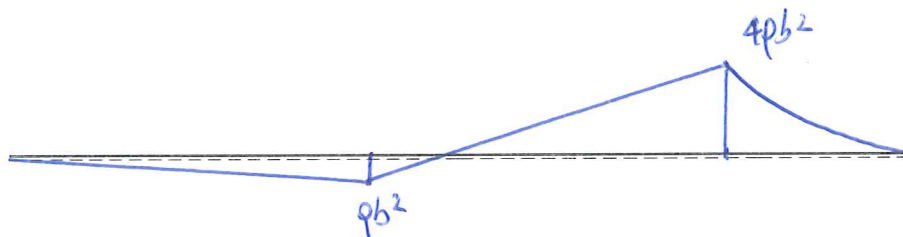
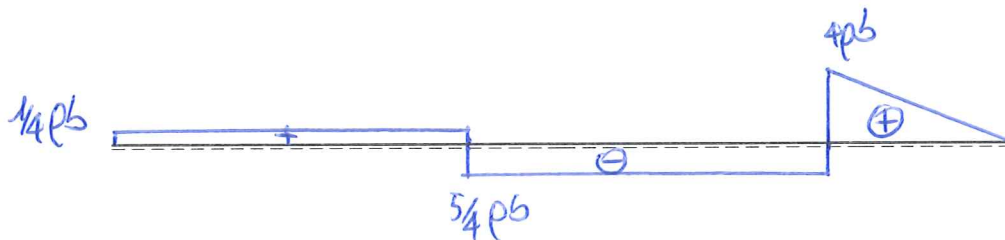
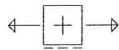
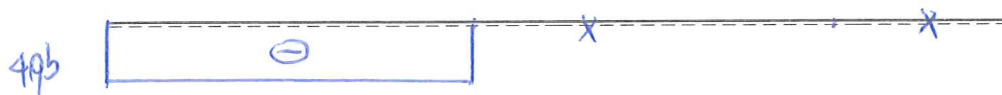


$$P_x = (22,500; -38,871)$$

$$P_y = (0,000; +38,871)$$



$$\varphi = 36,85 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_A(\hat{u}) &= \frac{1}{4}qb; & H_B(\hat{v}) &= -4pb; & V_B(\hat{u}) &= -\frac{3}{2}pb; & V_C(\hat{u}) &= \frac{2}{4}pb; & M_B(\hat{v}) &= pb^2; \\
 N_{AB} &= -4pb; & T_{AB} &= \frac{1}{4}pb; & M_{AB} &= \frac{1}{4}pb^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -\frac{5}{4}pb; & M_{BC} &= qb^2 - \frac{5}{4}pb^2; \\
 N_{DC} &= //; & T_{DC} &= 2pb; & M_{DC} &= -qb^2; \\
 \varphi_A &= -\frac{2pb^3}{3EJ}
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 06.06.2023

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

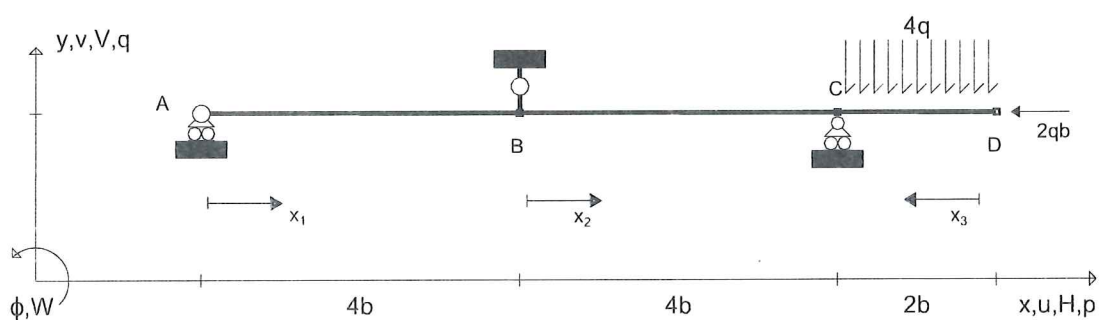
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , ϕ_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 06.06.23*002



EQ. DI CONGUENZA: $\Delta\phi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

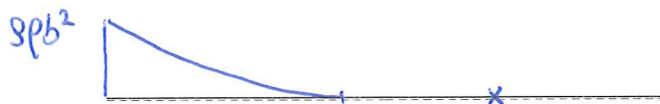
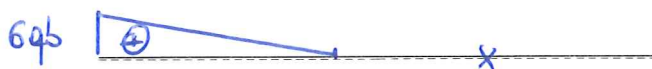
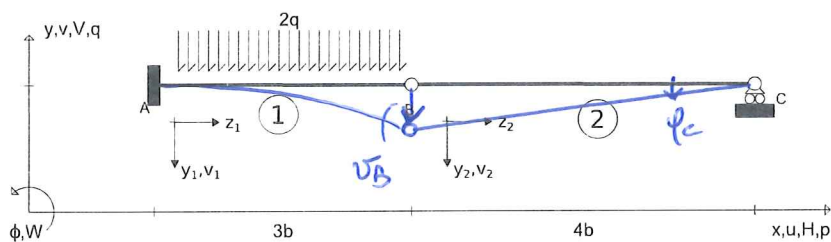
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *C*, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B*, v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 06.06.23*002



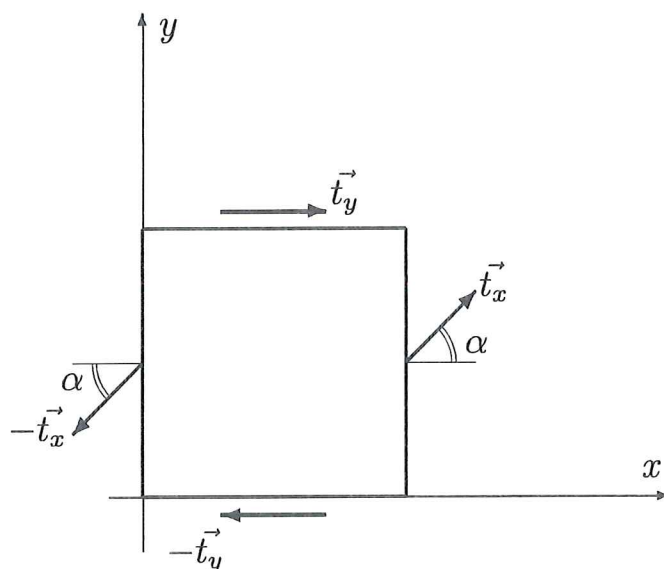
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 6qb; & M_A (\curvearrowright) &= 3pb^2; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 6qb - 2qz_1; & M_{AB} &= -3pb^2 + 6qbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= 0; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=4b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (3/4 pb^2 z_1^2 - qb z_1^3 + 9/12 z_1^4); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (3pb^2 z_1 - 3qb z_1^2 + 9/3 z_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (-81/16 qb^3 z_2 + 81/4 pb^4); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (-81/16 pb^3); \\
 v_B &= + \frac{81pb^4}{4EI} (\downarrow); & \varphi_C &= - \frac{81pb^3}{16EI} (\curvearrowleft);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y , rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -60^\circ$ (sicché $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$; $\cos \alpha = 1/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 55$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

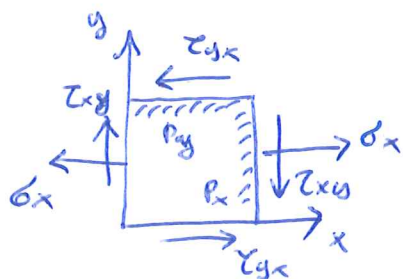
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 21,500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -47,631 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 63,326 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -35,826 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 49,576 \text{ (MPa)};$$

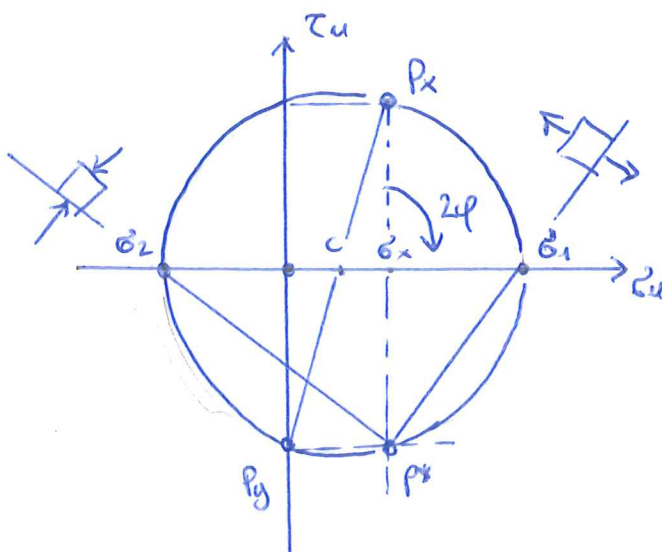
cerchio di Mohr:

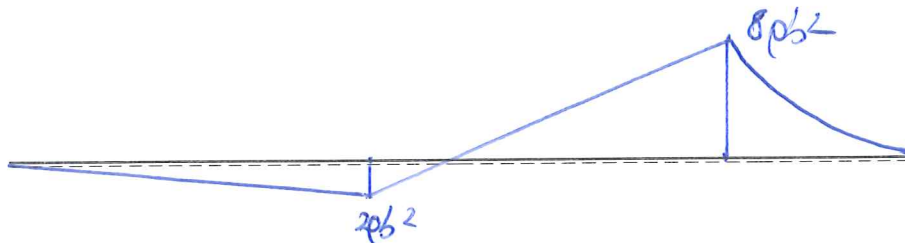
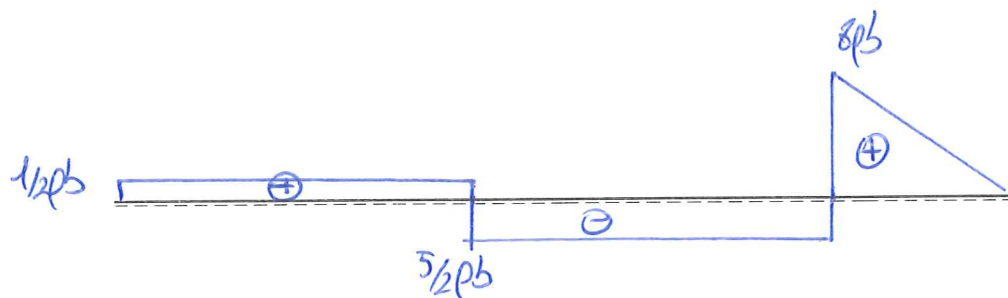
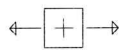


$$P_x = (21,500; +47,631)$$

$$P_y = (0,000; -47,631)$$

$$\varphi = -36,848 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$$\begin{aligned}
 V_A(\hat{v}) &= \frac{1}{2}pb; & H_B(\hat{v}) &= 2pb; & V_B(\hat{v}) &= -3pb; & V_C(\hat{v}) &= \frac{1}{2}pb; & M_B(\hat{v}) &= 2pb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= \frac{1}{2}pb; & M_{AB} &= \frac{1}{2}pbx_1; \\
 N_{BC} &= -2pb; & T_{BC} &= -\frac{5}{2}pb; & M_{BC} &= -2pb^2 - \frac{5}{2}pbx_2; \\
 N_{DC} &= -2pb; & T_{DC} &= 4px_3; & M_{DC} &= -2px_3^2; \\
 \varphi_A &= -\frac{4pb^3}{3EI}
 \end{aligned}$$